

Chương 2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

Phần 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A. Kiến thức cơ bản

I. Các tiên đề của hình học không gian.

Tiên đề 1: Qua hai điểm phân biệt trong không gian có một và chỉ một đường thẳng mà thôi.

Tiên đề 2: Qua ba điểm không thẳng hàng có một và chỉ một mặt phẳng mà thôi.

Tiên đề 3: Một đường thẳng có hai điểm nằm trong mặt phẳng thì nó nằm trong mặt phẳng.

Tiên đề 4: Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì có một đường thẳng chung đi qua điểm phân biệt ấy, người ta gọi đường thẳng chung của hai mặt phẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng.

II. Các cách xác định mặt phẳng.

Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định trong các trường hợp sau:

1. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng.
2. Qua hai đường thẳng cắt nhau.
3. Qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.
4. Qua hai đường thẳng song song với nhau.

Biểu thị



Kí hiệu:

(A, B, C) là mặt phẳng chứa (A, B, C) .

(a, b) là mặt phẳng xác định bởi a, b .

(A, a) là mặt phẳng xác định bởi A, a .

III. Hình chóp - Tứ diện

1. Hình chóp: Trong một mặt phẳng α cho đa giác lồi $A_1A_2A_3...A_n$. Điểm S nằm ngoài mặt phẳng. Nối S với các điểm $A_1, A_2, A_3...A_n$ ta được n miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm miền đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp. Kí hiệu $SA_1A_2A_3...A_n$.

2. Tứ diện: Hình chóp các mặt bên là tam giác gọi là tứ diện.

B. Các dạng bài toán tư giải

I. Bài tập mẫu

(Dạng 1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.)

Phương pháp giải:

- Xác định 2 mặt phẳng
- Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

Bài 156. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB > CD$), một điểm S ở ngoài mặt phẳng (ABCD). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Giải

Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có một điểm chung S.

$AD \in (SAD)$ vì A, D nằm trọn trong mặt phẳng (SAD).

$BC \in (SBC)$ vì B, C nằm trọn trong mặt phẳng (SBC).

$BC \times AD = I$.

Vậy: $I \in (SAD)$ vì $I \in AD$; $I \in (SBC)$ vì $I \in BC$

Bài 157. Cho 3 điểm A, B, C lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz. 3 điểm A', B', C' lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz. $AB \cap A'B' = M$; $BC \cap B'C' = N$; $CA \cap C'A' = P$. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Giải

Xét mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (A'B'C').

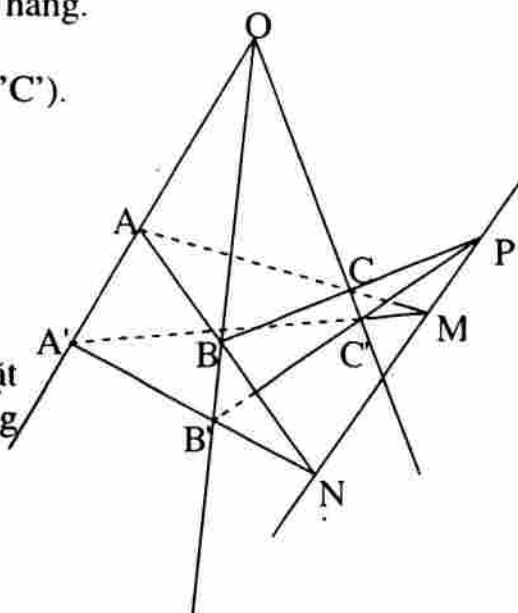
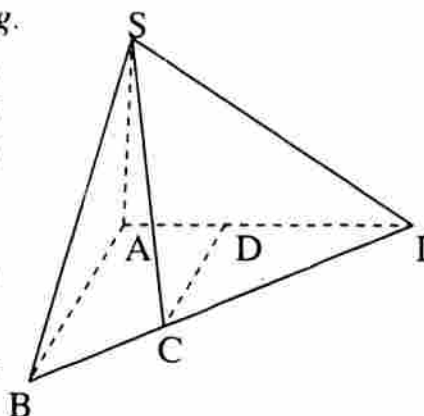
$N \in (ABC)$ vì $AC \in (ABC)$

$N \in (A'B'C')$ vì $A'C' \in (A'B'C')$

Tương tự $M \in (ABC)$; $M \in (A'B'C')$

$P \in (ABC)$; $P \in (A'B'C')$

Vậy M, N, P thuộc giao tuyến hai mặt (ABC) và (A'B'C'), suy ra M, N, P thẳng hàng.



(Dạng 2: Tìm giao điểm đường thẳng d với một mặt phẳng P.)

Phương pháp giải:

- Chọn mặt phẳng Q chứa d. Mặt phẳng $Q \times P = d' \Rightarrow d \times d' = I$.
- I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng P.

Bài 158. Cho tứ diện ABCD. Lấy AB điểm I sao cho $IB = \frac{2}{3} AI$; $AJ = \frac{1}{4} JD$, Tìm giao điểm đường JI với mặt phẳng (BCD).

Giải

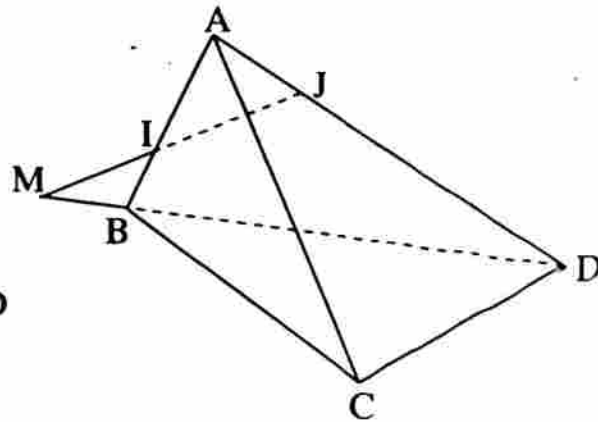
$$\text{Do } \begin{cases} IB = \frac{2}{3} AI \\ AJ = \frac{1}{4} JD \end{cases}$$

$$JI \in (ABD)$$

$$\text{Giao tuyến } (ABD) \times (ADC) = BD$$

$$\text{Vậy giao điểm } JI \times BD = M.$$

$$M = JI \times (BCD).$$



Bài 159. Cho tứ giác ABCD các điểm M, N lần lượt là các trung điểm của AC và BC, lấy điểm K thuộc BD (K không là trung điểm BD). Tìm giao điểm của AD với mặt phẳng (MNK).

Giải

$$\text{Ta thấy: } AD \in (ACD).$$

Tìm giao tuyến mặt (MNK) với mặt (ACD).

$$\text{Điểm } M \in (ACD)$$

$$M \in (MNK)$$

Trong mặt phẳng (BCD)

$$KN \times CD = J \text{ mà } CD \in (ACD); KN \in (MNK) \text{ nên } J \in (ACD) \text{ và}$$

$$J \in (KNM). \text{ Vậy giao tuyến hai mặt phẳng là đường } JM \Rightarrow JM \times AD = P$$

$$\text{Vậy } P = (KMN) \times AD \text{ (điểm phải tìm).}$$

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

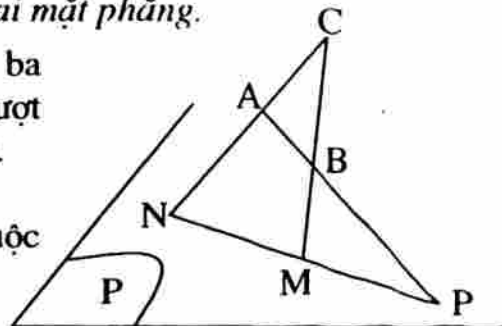
Phương pháp chứng minh:

- Chứng minh M, N, P thẳng hàng thì ta tìm M, N, P thuộc hai mặt phẳng và chính là giao tuyến hai mặt phẳng.

Bài 160. Cho một mặt phẳng (Q) và ba điểm A, B, C. BC, AC, AB cắt (Q) lần lượt M, N, P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Giải

Xét mặt phẳng (ABC) thì M, N, P thuộc (ABC) và M, N, P thuộc mặt phẳng (Q).



Vậy M, N, P thuộc giao tuyến $(ABC) \times (Q)$.

Bài 161. Cho hình chóp $SABC$ trong các miền tam giác SAB, SBC, SCA lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho các đường LM, MN, NL cắt mặt phẳng.

Xác định các giao điểm IJK của LM, MN, NL với mặt phẳng (ABC)

Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Giải

Xác định giao điểm LM với mặt phẳng (ABC) .

Xét mặt phẳng (LMC) với mặt (ABC) có một điểm C chung. Cần xét thêm một điểm chung nữa. Ta biết giao tuyến của (LNC) với (ABC)

$$(LNC) \times (SAC) = LC$$

$$NC \times SA = P \Leftrightarrow PL \times AB = I$$

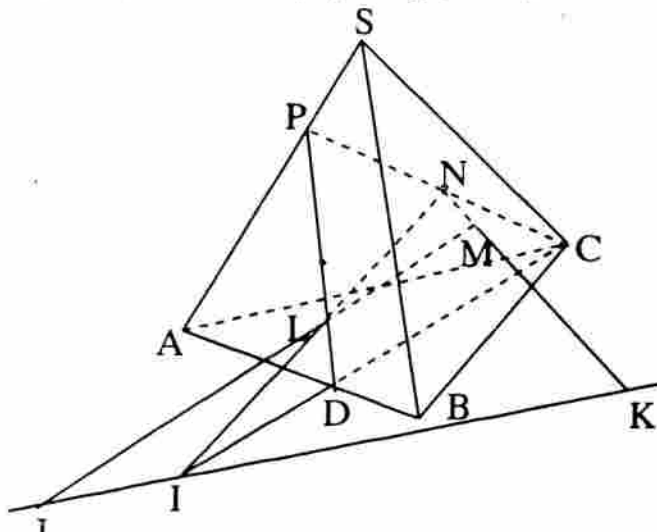
$$\Rightarrow CD \text{ giao tuyến của mặt } (LNC) \times (ABC) = CD \Leftrightarrow NL \times CD = I$$

$$\text{Tương tự: } LM \times (ABC) = J.$$

$$NM \times (ABC) = K.$$

Xét mặt phẳng (LMN) và mặt phẳng (ABC) thì (MNL) chứa I, J, K
 (ABC) chứa I, J, K .

Nên I, J, K thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.



II. Bài tập tư giải

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Cho hai điểm A, B , có bao nhiêu mặt phẳng chứa hai điểm đó?
 Mệnh đề nào sau đây đúng.

- a) Chỉ có một mặt phẳng duy nhất
- b) Chỉ có hai mặt phẳng chứa hai điểm đó
- c) Chỉ có ba mặt phẳng chứa hai điểm đó
- d) Có vô số mặt phẳng chứa hai điểm đó.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. M, N lần lượt thuộc AB, AC , $MN \times BC = I$.
 Các giao tuyến (MCD) với mặt phẳng (ABD) , (ACD) là

- a) DM, DN
- b) ID, MD
- c) IA, ND
- d) Có kết quả khác.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$; J, K lần lượt thuộc BC, CD , $JK \times BD = E$, một điểm F thuộc AD , $EF \times AB = I$. Giao tuyến của mặt phẳng (JKF) với mặt phẳng (ABD) và (ABC) là:

- a) EF, IJ
- b) IK, JI
- c) IF, JK
- d) Có kết quả khác.

Bài 4. Cho n điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Các mệnh đề nào sau đây đúng?

- a) Có ít nhất ba điểm thẳng hàng
- b) Có vô số điểm lớn hơn 3 thẳng hàng
- c) Không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng
- d) Có kết quả khác.

Bài 5. Cho n điểm trong đó bất kì 4 điểm nào cũng đồng phẳng. Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng.

- a) n điểm đó đồng phẳng
- b) Có ít nhất 5 điểm không đồng phẳng
- c) Có ít nhất hai mặt phẳng riêng biệt chứa tất cả các điểm
- d) Có kết quả khác.

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 162. Cho hình chóp SABCD. A' , B' , C' lần lượt nằm trên cạnh SA, SB, SC. Dựng thiết diện hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C')$.

Bài 163. Cho hình chóp SABCD, ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt trung điểm SA, BC, CD. Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(MNP).

Bài 164. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M, N theo thứ tự trung điểm của AB, SC.

- a) Xác định giao điểm I, J của mặt phẳng (SBD) theo thứ tự đường thẳng AN, MN
- b) Tính tỉ số $IA:IN$ và $JM:JN$
- c) Chứng minh ba điểm B, I, J thẳng hàng
- d) Tính tỉ số $IB:IJ$.

Bài 165. Cho hai hình thang ABCD và ABEF chung đáy AB (đáy lớn AB) không cùng nằm trong mặt phẳng.

- a) Xác định giao tuyến mặt (AEC) và (BFD) ; (BCE) và (ADF)
- b) Lấy một điểm $M \in DF$. Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mặt (BCE)
- c) Chứng minh hai đường AC và BF không cắt nhau.

Bài 166. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng $a \times b = I$. Ngoài mặt phẳng (P) cho hai điểm M, N sao cho $MN \times (P) = O$ và O không thuộc a, b. Đường thẳng c đi qua O cắt a, b tại A, B. Gọi A' là giao điểm của AN và BM, B' là giao của AM và BN.

- a) Tìm quỹ tích A' , B'
- b) Chứng minh $A'B'$ đi qua một điểm cố định.

Bài 167. Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là tứ giác lồi, một mặt phẳng chứa cạnh bên, chia đáy hình chóp thành hai phần có diện tích bằng nhau. Dựng thiết diện.

Bài 168. Cho hình chóp SABCD đáy không phải là hình thang. Gọi M là trung điểm SA. Dựng thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (BCM).

Bài 169. Cho hình chóp SABCD bất kì. Dựng thiết diện đi qua M, N, I.

a) $M \in AB; N \in SC; I \in SD$

b) $M \in AB; N \in SC; I \in SA$.

Bài 170. Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm $\triangle ACD$. M, N, P các điểm thuộc các cạnh AB, AC, AD tương ứng. $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$. Gọi I, J là giao điểm của MN với BC và MP với BD.

a) Chứng minh các đường MG, FI, NJ đồng phẳng.

b) Gọi EF, là các trung điểm CL, MI; H là giao điểm của MG và BE. K là giao điểm của GF với mặt phẳng (BCD). Chứng minh các điểm H, K, I, J thẳng hàng.

III. Hướng dẫn giải - đáp số

Phần 1: Bài tập trắc nghiệm

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5
d	d	a	c	a

Phần 2. Bài tập tự luyện

Bài 162.

Phương pháp giải:

Tìm giao điểm các cạnh với mặt $(A'B'C')$.

Tìm giao tuyến $(A'B'C')$ với mặt (SCD) .

Ta thấy có điểm chung C' .

Cần tìm điểm chung thứ 2.

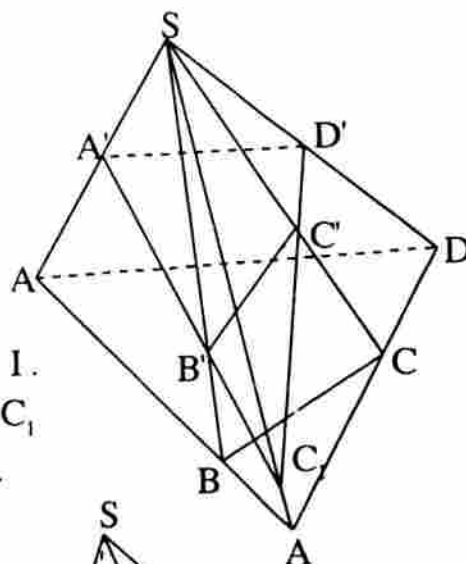
Giao tuyến mặt (SAB) với (SCD)

Có điểm chung S, điểm thứ 2 là $AB \times DC = I$.

Vậy $(SAB) \times (SCD) = SI$. Vậy $A'B \times SI = C_1$

C_1 là điểm chung thứ 2 $(A'B'C')$ với (SCD) .

$C'C_1 \times SD = D'$ mặt thiết diện $(A'B'C'D')$.



Bài 163.

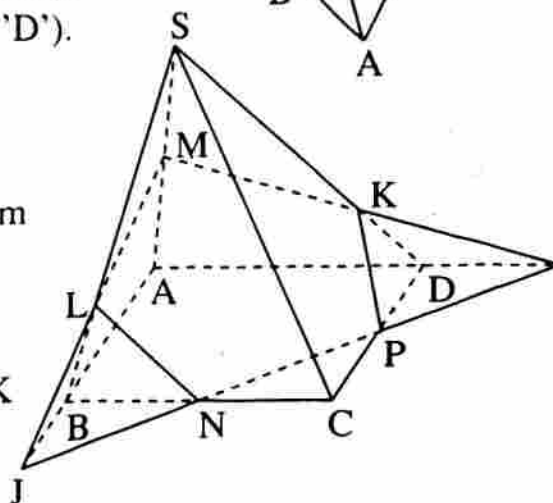
Tìm giao SD với mặt (MNP) .

Xét mặt (SAD) và (MNP) có điểm chung M.

Tìm điểm chung thứ 2: $NP \times AD = I$

I là điểm chung thứ 2

$\Rightarrow (SAD) \times (MNP) = MI; MI \times SD = K$



Tương tự: $(SAB) \times (MNP)$ có 1 điểm chung M.

Điểm chung thứ 2 là $NP \times AB = J$

$SB \times MJ = L$. Vậy thiết diện MLNPK.

Bài 164.

a) Xét hai mặt phẳng (SBD) và (SAC)
thì SO là giao tuyến của 2 mặt phẳng

$$\Rightarrow AN \times (SBD) = AN \times SO = I.$$

Mặt (ANB) và (SBD) có giao tuyến BI.

$$\text{Vậy } MN \times (SBD) = MN \times BI = J.$$

Vậy B, I, J thẳng hàng.

Xét trong $\triangle SAC$ có I là trọng tâm
 $\triangle SAC \Rightarrow IA : IN = 2$.

b) Xét $\triangle ABN$ thì MN là trung tuyến.

$$\text{Theo bài 127 và } \frac{IN}{NA} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{IJ}{JB} = \frac{JK}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IJ}{IJ + JB} = \frac{1}{3 + 1} = \frac{1}{4} = \frac{IJ}{IB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow JB : IJ = 4$$

$$\text{Trong } \triangle ABN: \frac{NP}{NM} = \frac{1}{3} = \frac{JP}{MJ} = \frac{NJ}{MN + MJ} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3NJ = MJ + JN + MJ \Leftrightarrow 3NJ = 2MJ \Leftrightarrow MJ : NJ = 1.$$

Bài 165.

a) Xác định giao của:

$$(AEC) \times (BDF)$$

$BD \times AC = I$ thuộc hai
mặt phẳng

$BF \times AE = J$ thuộc hai
mặt phẳng.

Vậy

$$(AEC) \times (BDF) = IJ$$

Xác định giao của (BCE)
và (ADF)

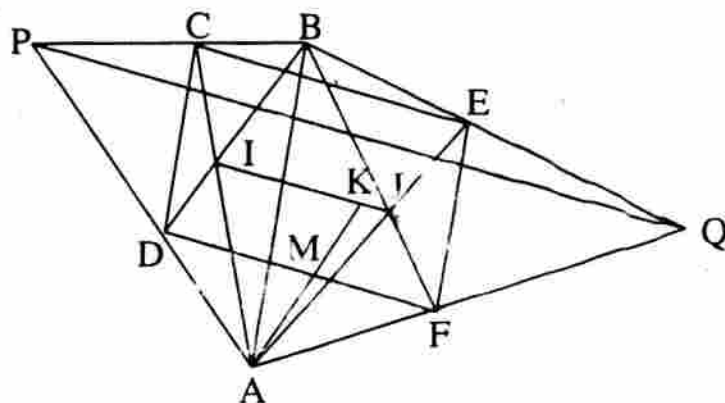
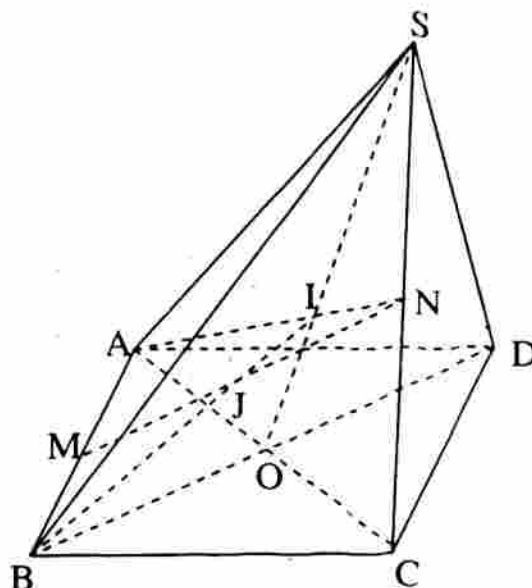
$AD \times BC = P$ thuộc hai mặt phẳng

$AF \times BE = Q$ thuộc hai mặt phẳng

Vậy giao tuyến (BCE) và (ADF) là PQ.

b) Lấy M thuộc DF. Tìm giao AM với (BCE).

$AM \times PQ = K$ (điểm phải tìm).



c) Giả sử AC và EF cắt nhau nghĩa là A, C, B, F thuộc một mặt phẳng α thì α chứa ABC $\Rightarrow \alpha \equiv (ABCD)$ và α chứa (ABF) thì $\alpha \equiv (ABEF)$.
 Vậy điều này vô lí nên AC và BF không cắt nhau.

Bài 166.

a) $A' \in BM \Rightarrow A' \in (M, b)$

$A' \in AN \Rightarrow A' \in (N, a)$

Vậy A' thuộc giao tuyến hai mặt
 $(M, b) \times (N, a) = l_x$.

Vậy A' thuộc đường thẳng l_x .

$B' \in BN \Rightarrow B' \in (N, b)$

$B' \in AM \Rightarrow B' \in (M, a)$

Vậy B' thuộc giao tuyến hai mặt
 $(N, b) \times (M, a) = l_y$

Vậy B' thuộc đường thẳng l_y

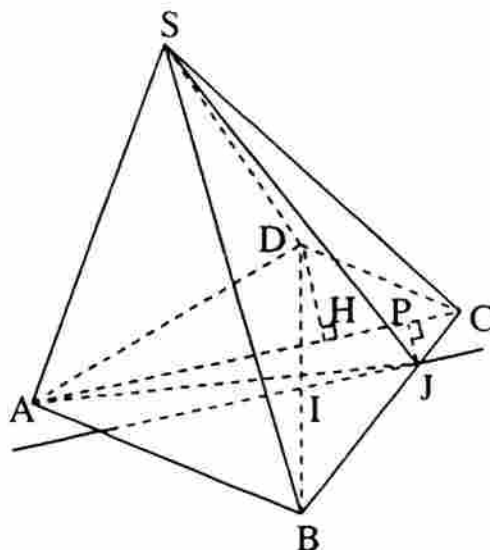
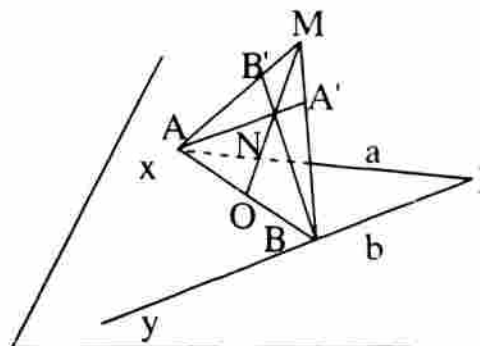
Vậy A' thuộc đường thẳng l_x cố định giao
 hai mặt phẳng (M, b) và (N, a)

Vậy B' thuộc đường thẳng l_y cố định giao
 hai mặt phẳng (M, a) và (N, b) .

b) Chứng minh $A'B'$ đi qua một điểm cố
 định.

Theo chứng minh câu a thì $A'B'$ thuộc
 mặt xIy cố định.

$A'B'$ và MN nằm trong mặt phẳng
 $A'B' \times MN = I$ mà $MN \times (xIy) = J$ vậy J cố
 định.



Bài 167. Giả sử ta lấy cạnh bên SA.

Ta tìm đường Ax chia ABCD thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lấy I trung điểm BD.

Kẻ $l_x // AC$ cắt BC tại J

Đường AJ đường cần tìm.

Thật vậy:

$$2S_{AJCD} = AC \cdot h \quad (1) \text{ trong đó } h = DH + JP$$

$$2S_{ABJ} = AC(H + JP) - (JP \cdot AC) = 2S_{ABC} - 2S_{AJC} = AC \cdot h \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow S_{AJCD} = S_{ABJ}$$

Bài 168. Phương hướng giải tìm giao mặt với các cạnh hình chóp.

Cách 1: Xét giao của (SAD) và mặt (SBC) có điểm chung $AD \times BC = N$

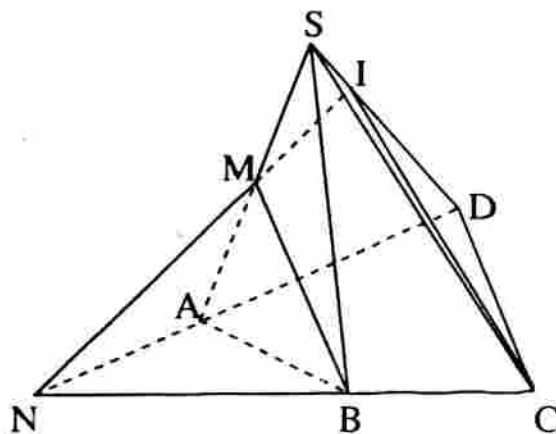
$$\text{Vậy } (BCM) \times (SAD) = MN \Rightarrow MN \times SD = I$$

Vậy thiết diện MBCI.

Cách 2: Gọi giao 2 đường chéo

$$SM \times SO = J \Rightarrow BJ \times SD = I$$

Tứ giác BCIM là thiết diện.



Bài 169.

Gọi mặt phẳng $(MNI) \equiv R$

$$(R) \times (SDC) = IN$$

$$IN \times DC = K$$

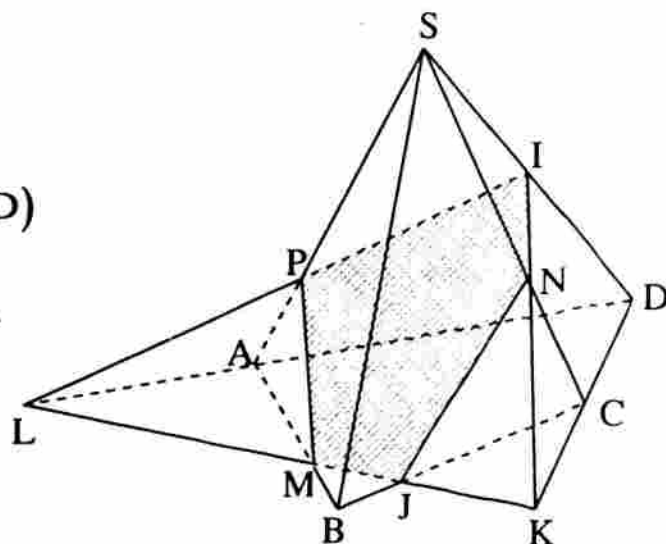
$$MK \times BC = J \in R$$

$$MK \times AD = L \in R, \quad L \in (SAD)$$

$$LI \times SA = P$$

Vậy thiết diện MJNIP cần tìm.

b) Giải tương tự.



Bài 170.

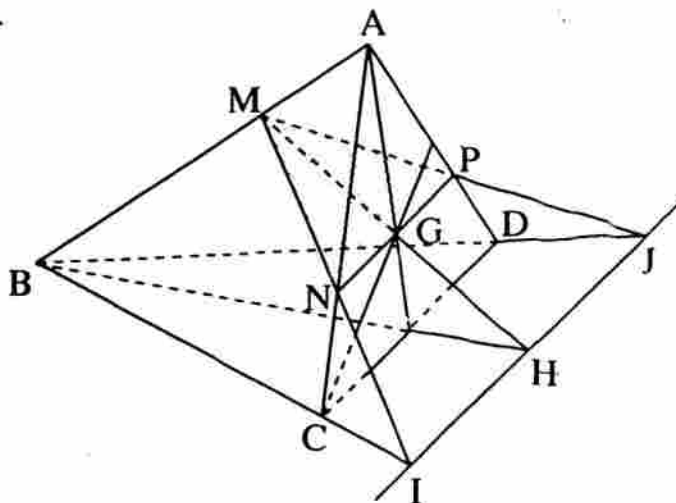
a) Ta thấy các điểm M, N, I, J, P cùng thuộc một mặt phẳng chứa MJ và MI.

$$\text{Xét } \triangle ADC \text{ thì } NP \parallel DC \text{ vì } \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ACD \text{ nên } \frac{GE}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow G \in NP$$

Vậy MG, PI, NJ đồng phẳng.

b) Xét hai mặt phẳng (BCD) và (MIJ) thì K, I, H, J thuộc hai mặt đó $\Rightarrow K, I, H, J$ thẳng hàng.



PHẦN 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản

I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a, b trong không gian, các trường hợp xảy ra vị trí tương đối của a đối với b :

* Cùng thuộc một mặt phẳng.

- a cắt b tại điểm M . Kí hiệu $a \cap b = M$
- a song song với b . Kí hiệu $a // b$
- $a \equiv b$

* a và b không thuộc một mặt phẳng.

- Gọi a, b chéo nhau.

II. Tính chất

1. Qua một điểm ở ngoài đường thẳng chỉ vẽ được một đường thẳng duy nhất song song với đường thẳng cho trước.

2. Nếu 3 mặt phẳng đôi một cắt nhau thì ba giao tuyến đồng quy hoặc song song với nhau.

3. Nếu hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song với nhau thì giao tuyến của hai mặt phẳng:

- Hoặc song song với hai đường đó
- Hoặc trùng với một trong hai đường đó.

4. Hai đường thẳng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

5. Mọi kết quả trong hình học phẳng được thực hiện.

B. Các dạng bài toán tư giải

I. Bài tập mẫu

Dạng 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng sử dụng tính chất (3) và (4) để xác định

Bài 171. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng sau.

- a) Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD)
- b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD)

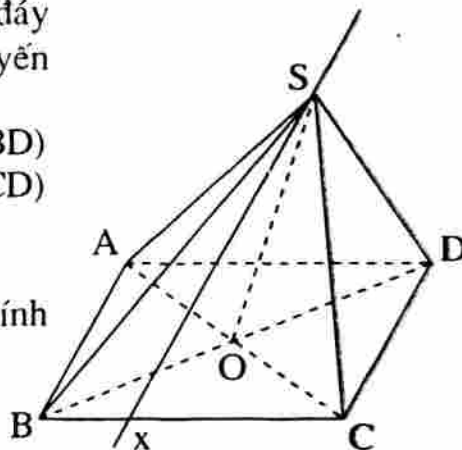
Giải

a) (SAC) và (SBD) có điểm S chung.

Vậy tìm điểm chung thứ 2 hoặc dựa vào tính chất (3), (4).

$BD \cap AC = O$ (điểm thứ 2)

Vậy giao tuyến là SO .



b) (SAB) và (SDC) có cặp cạnh $AB \parallel DC$ và có điểm chung là S. Vậy giao điểm đi qua S và song song AB, (hoặc DC) là $Sx \parallel AB$.

Bài 172. Cho tứ diện SABC. P, Q, R, S là bốn điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng nếu bốn điểm P, R, Q, S đồng phẳng thì PQ, SR, AC song song với nhau hoặc đồng quy.

Giải

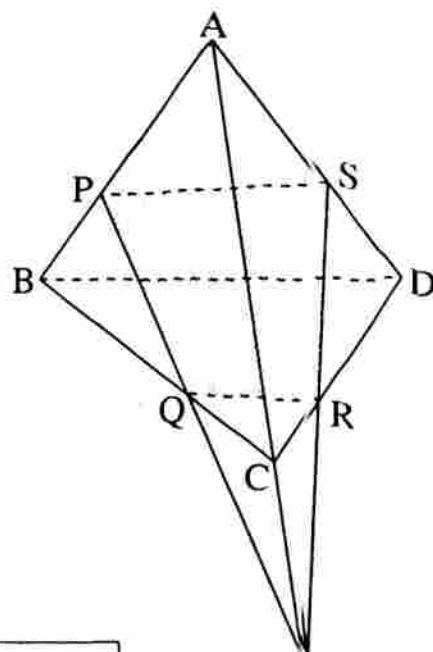
Xét 3 mặt phẳng (PQRS), (SAB), (SBC)

$$(PQRS) \times (SAB) = PQ$$

$$(PQRS) \times (SBC) = RS$$

$$(SAB) \times (SBC) = SB$$

Vậy PQ, RS, SB đồng quy hoặc song song với nhau (theo tính chất).



Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp chung:

- Phát hiện hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng, sử dụng điều kiện hai đường thẳng song song trong mặt phẳng.
- Dùng tính chất: hai đường thẳng song song với đường thẳng thứ 3.
- Xét hai mặt phẳng chứa hai đường song song thì giao tuyến song song với hai đường đó.

Bài 173. Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mặt phẳng (PQR) với cạnh AD nếu $PR \parallel AC$.

Giải

Xét hai mặt phẳng (PQR) và (ACD).

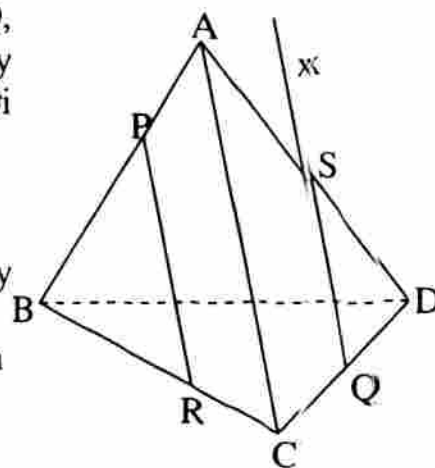
Hai mặt chứa PR và AC mà $PR \parallel AC$. Vậy giao tuyến của hai mặt đó song song PR và AC.

Hai mặt đó có điểm chung Q. Vậy giao điểm $AD \times Qx = S$ ($Qx \parallel AC$).

S là giao điểm $(PQR) \times AD = S$.

Bài 174. Cho tứ diện ABCD với P, Q lần lượt là trung điểm AB, CD. Gọi R là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$ và S là giao điểm của cạnh AD với mặt phẳng (PQR).

Chứng minh rằng $AS = 2SD$.



Giải

a) Chứng minh AG đi qua trọng tâm A' của ΔBCD . Phát biểu kết luận tương tự đối với BG, CG, DG.

b) Chứng minh $GA = 3GA'$.

Bài 178. Cho tứ diện ABCD; M, N, P, Q, R, S lần lượt các trung điểm cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh

c) MPNQ là hình bình hành

d) Chứng minh MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài 179. Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy và

$$\frac{AG}{AA_1} = \frac{BG}{BB_1} = \frac{CG}{CC_1} = \frac{DG}{DD_1} = \frac{3}{4}.$$

Bài 180. Cho tứ diện ABCD; I, J là trọng tâm tam giác ABC và ABD. Chứng minh $IJ \parallel CD$.

Bài 181. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trọng tâm tam giác ΔBCD và ΔACD . Một điểm M trong không gian. Gọi M_1, M_2 đối xứng với M qua I, J. Chứng minh rằng: $BM_2 \times AM_1 = S$ và tỉ số $\frac{SM_2}{SB} = \frac{2}{3} = \frac{SM_1}{SA}$.

Bài 182. Cho tứ diện SABC. Trên SA lấy điểm M sao cho: $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$, trên

AC lấy điểm F thoả mãn $\frac{SF}{FA} = \frac{1}{2}$. Trên SB lấy điểm N thoả mãn $\frac{SN}{NB} = 2$.

Tìm thiết diện mặt (MNF) với hình tứ diện. Gọi E là giao điểm BC với (MNF). Tìm tỉ số $\frac{CE}{EB}$.

Bài 183. Cho hình chóp SABCD với ABCD là hình thang đáy là AD và BC. Biết $AD = a; BC = b$. Gọi I, J là trọng tâm tam giác SAD và SBC. Mặt (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt (BCI) cắt SA, SD lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh $MN \parallel PQ$

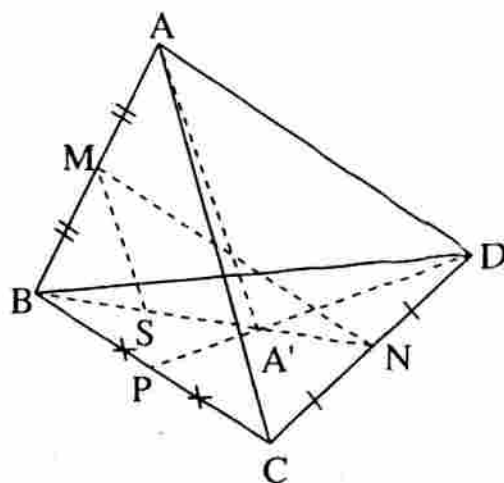
b) Giả sử AM cắt BP tại E, CQ cắt DN tại F. Chứng minh $EF \parallel PQ \parallel MN$. Tìm EF theo a, b.

III. Hướng dẫn giải - đáp số

Bài 177.

Cách 1. Xét hai mặt phẳng (ABN) và (APD) cắt nhau theo giao tuyến AA'.

Xét ΔABN thì MN trung tuyến và $\frac{A'N}{BN} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow MN \times AA'$ tại điểm G. G là trung điểm của MN $\Rightarrow GA = 3GA'$.



(theo bài 127)

Cách 2. Giả sử AG cắt mặt phẳng (BCD) tại A' ta chứng minh A' là trọng tâm ΔBCD .

$A' \in BQ$.

$$\text{Kẻ } MS \parallel AA' \Rightarrow GA' = \frac{1}{2}MS = \frac{1}{4}AA' \quad (1)$$

$$\Rightarrow NA' = \frac{1}{2}A'B \Rightarrow NA' = \frac{1}{3}NB \Rightarrow A' \text{ là trọng tâm. } (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A', A, G$ thẳng hàng, $GA' = \frac{1}{3}GA$ (đpcm).

Phát biểu tương tự: Gọi P, Q là trung điểm của BC, AD; G là trung điểm PQ. Chứng minh BG đi qua trọng tâm ΔACD .

Bài 178.

a)

$$\left. \begin{array}{l} MP \parallel AC \\ NQ \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow MP \parallel QN$$

Tương tự:

$$\left. \begin{array}{l} MQ \parallel BD \\ NP \parallel BD \end{array} \right\} \Rightarrow MP \parallel PN$$

Vậy MPNQ là hình bình hành.

MN cắt PQ tại O là trung điểm của mỗi đoạn

b) Tương tự PQ và SR cắt nhau ở điểm O.

Vậy ba đường PQ, SR, MN đồng quy.

Bài 179.

Gọi A_1, B_1 là trọng tâm tam giác BCD và ACD

$$\frac{MA_1}{MB} = \frac{MB_1}{MA} = \frac{1}{3}$$

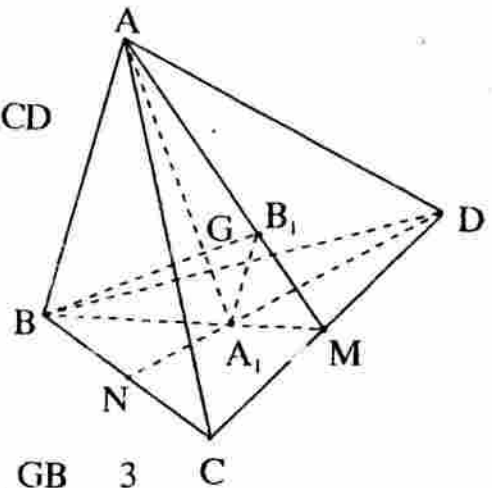
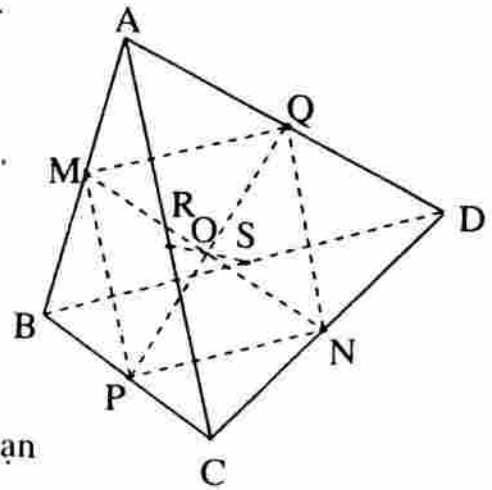
$$\Delta ABM; AA_1 \times BB_1 = G$$

Theo định lý Talet thì:

$$\frac{GA_1}{GA} = \frac{GB_1}{GB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GA_1} = \frac{GB}{GB_1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{GA}{GA + GA_1} = \frac{GB}{GB + GB_1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{GA}{AA_1} = \frac{GB}{BB_1} = \frac{3}{4}$$

Tương tự ta chứng minh được: $\frac{GD}{DD_1} = \frac{GC}{CC_1} = \frac{3}{4}$ và các đường đó đồng quy tại G (đpcm).

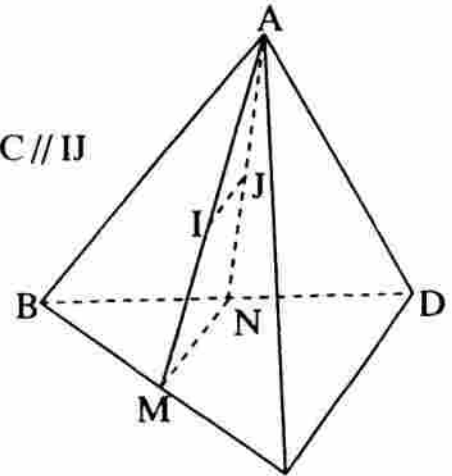


Bài 180.

Xét trong mặt phẳng (AMN) và $\triangle AMN$ có:

$$\frac{IA}{MA} = \frac{JA}{NA} = \frac{2}{3}.$$

Theo định lí Talét $IJ \parallel MN$ mà $MN \parallel DC \Leftrightarrow DC \parallel IJ$
(cùng song song MN).

**Bài 181.**

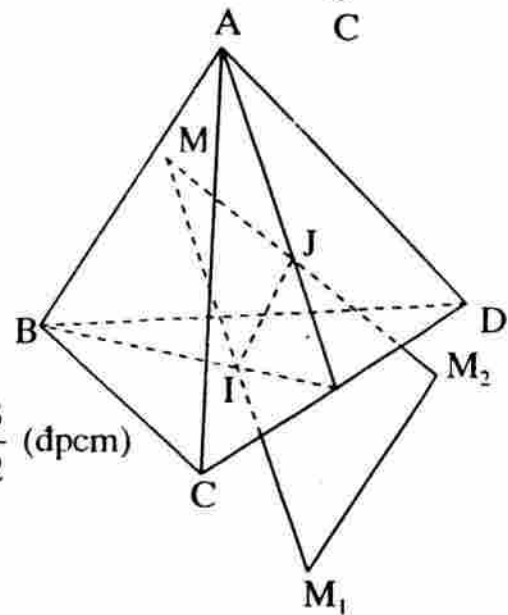
(Áp dụng bài 180)

$$IJ \parallel AB; \frac{IJ}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$IJ \parallel M_1M_2 \text{ và } \frac{M_1M_2}{AB} = \frac{2}{3}$$

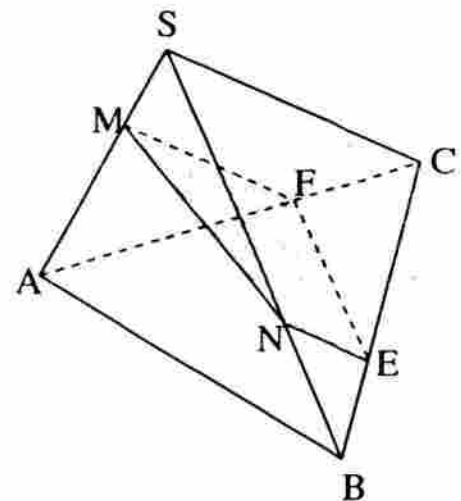
Xét trong mặt phẳng ABM_1M_2

$$\Rightarrow AM_1 \times BM_2 = S \text{ và } \frac{SA}{SM_1} = \frac{AB}{M_1M_2} = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}$$

**Bài 182.**

Ta thấy $MF \parallel SC$, vậy (SBC) cắt (MFN) theo giao tuyến đi qua N và $NE \parallel MF \parallel SC$.

$$\text{Vậy } \frac{NB}{NS} = \frac{1}{2} = \frac{BE}{EC} \Leftrightarrow \frac{EC}{EB} = 2$$



Bài 183.

a) $(AJD) \times (SBC) = MN$.

Ta có: $AD \parallel BC \Leftrightarrow MN \parallel BC \parallel AD$.

$(BIC) \times (SAD) = PQ$ ta có $AD \parallel BC \Rightarrow PQ \parallel AD \Leftrightarrow MN \parallel PQ$.

Vậy $\frac{JB}{BS} = \frac{CN}{CS} = \frac{AP}{AS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EP}{EB} = \frac{EM}{EA} = \frac{SP}{SA} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{EM}{EA} = \frac{2}{3} \\ \frac{FN}{FD} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Tương tự: $EF \parallel PQ \parallel BC$.

b) Xét hình thang $AMND$.

$$\frac{EM}{EA} = \frac{2}{3} = \frac{EN}{ED}$$

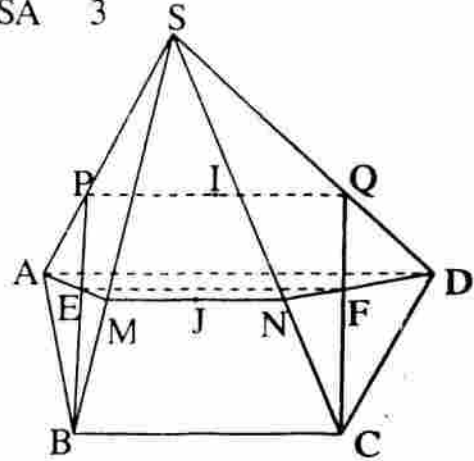
Nối AN cắt EF tại K .

$$EK = \frac{3}{5} MN$$

$$KF = \frac{2}{5} AD = \frac{2}{5} a$$

$$\text{mà } MN = \frac{2}{3} BC \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3} b.$$

$$\text{Thay vào ta có: } EK + KF = EF = \frac{2}{5} b + \frac{2}{5} a = \frac{2}{5} (a + b).$$



PHẦN 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A. Kiến thức cơ bản

I. Vị trí tương đối đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) tùy theo điểm chung của d và mặt phẳng α .

- Nếu d và α không có điểm chung $\Rightarrow d // (\alpha)$ hay $(\alpha) // d$.
- Nếu d và α có một điểm chung duy nhất ta nói d cắt α .
- Nếu d và α có hai điểm chung thì ta nói $d \in \alpha$.

II. Tính chất

1. Cho d và (α) ; d không nằm trong (α) và $d // d' \in \alpha$ thì $d // \alpha$

$$\begin{cases} d \notin \alpha \\ d // d' \in \alpha \end{cases} \Rightarrow d // (\alpha)$$

2. Cho $d // (\alpha)$ nếu mặt phẳng (β) chứa d . $(\beta) \times (\alpha) = d'$ thì $d' // d$.

$$\begin{cases} d // \alpha \\ d \in \beta \end{cases} \Rightarrow d' // d$$

3. Nếu $\alpha // d$; $\beta // d$ thì $\alpha \cap \beta = d'$ thì $d' // d$.

$$\begin{cases} \alpha // d; \beta // d \\ \alpha \cap \beta = d' \end{cases} \Rightarrow d' // d$$

4. Nếu hai đường thẳng d_1 chéo d_2 có duy nhất một mặt phẳng (α) chứa d_1 song song với d_2 .

$$\begin{cases} d_1 \text{ và } d_2 \text{ chéo nhau} \\ \text{có duy nhất } \alpha \text{ chứa } d_1 \text{ và } \alpha // d_2 \end{cases}$$

B. Bài tập

I. Bài tập mẫu.

(Dạng 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng)

Phương pháp chung:

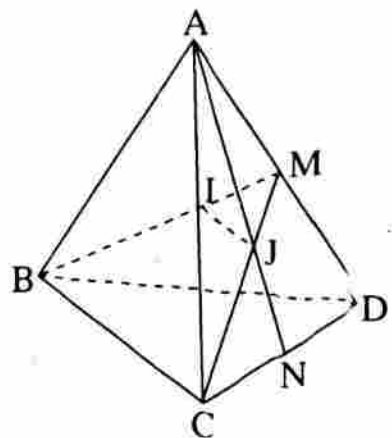
- Dựa và định nghĩa.
- Chứng minh: $d // (\alpha) \Leftrightarrow d // d' \in (\alpha)$.
- Chứng minh: $d \in (\beta), (\beta) // (\alpha)$

Bài 184. Cho tứ diện ABCD. I, J lần lượt là trọng tâm ΔACD , ΔABD . Chứng minh $IJ // (ABC)$.

Giải.

Gọi M là trung điểm của AD, $I \in BM$, $J \in CM$

Xét ΔBMC ta có:



$$\frac{IM}{MB} = \frac{JM}{CM} = \frac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel BC.$$

Mà $BC \in (ABC) \Rightarrow IJ \parallel (ABC)$.

Bài 185. (Bài tập 1 SGK trang 79) Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng, có tâm O và O'.

a) Chứng minh $OO' \parallel (ADF)$ và (BCE)

b) M, N lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle ABE$. Chứng minh $MN \parallel (CEF)$.

Giải.

a) Xét $\triangle BEF$ có OO' là đường trung bình $\Rightarrow OO' \parallel DF$ mà $DF \in (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$. (đpcm).

Tương tự xét $\triangle CAE$ có OO' là đường trung bình

$\Rightarrow OO' \parallel CE$ mà $CE \in (BCE)$.

Vậy $OO' \parallel (BCE)$. (đpcm).

b) Xét trọng tâm M tam giác ABD và N trọng tâm tam giác ABE

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{OM}{OA} = \frac{O'N}{OB} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Cách 1: Xét trọng tâm P tam giác ABF

$$\Rightarrow \frac{O'P}{O'A} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow NP \parallel EF \quad (1)$$

$$\text{Và xét } \triangle ACE \Rightarrow \frac{MA}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow MP \parallel CE \quad (2)$$

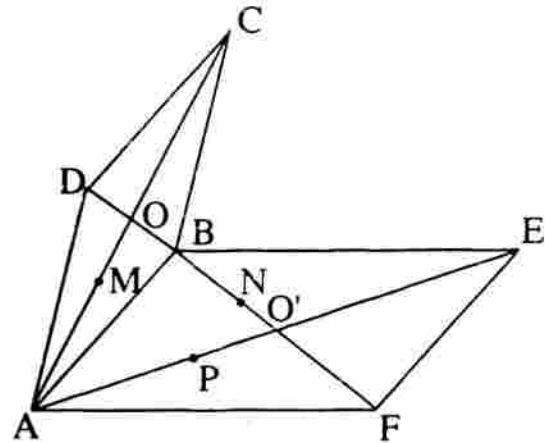
Từ (1) và (2) $\Rightarrow (MNP) \parallel (CEF)$.

Cách 2: $MN \parallel (CEF)$

Ta thấy mặt (CEF) trùng $(DCEF)$; gọi R là trung điểm AB. $M \in DR$ và $N \in ER$.

$$\frac{MR}{DR} = \frac{NR}{ER} = \frac{1}{3}$$

Vậy $MN \parallel DE \Rightarrow MN \parallel (DCEF)$ (đpcm).



Dạng 2: Dựng một thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp chung:

~ Nếu α chứa đường thẳng a mà $a \parallel (\beta)$ thì $\alpha \times \beta = b \Rightarrow a \parallel b$.

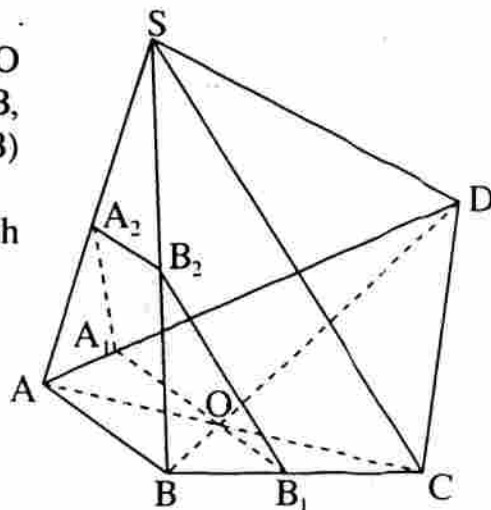
Bài 186. (Bài tập 2 SGK trang 74)

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Xác định thiết diện của hình chóp đi qua O , song song với AB và SC . Thiết diện là hình gì?.

Giải.

Gọi mặt phẳng chứa thiết diện đi qua O và song song AB nên cắt mặt đáy $A_1B_1 \parallel AB$, cắt mặt (SBC) tại $B_1B_2 \parallel SC$ và cắt mặt (SAB) tại $B_2A_2 \parallel AB$. Vậy thiết diện $A_1B_1B_2A_2$.

$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel AB$ nên thiết diện là hình thang.



Bài 186. (Bài tập 3 SGK trang 79).

Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là một hình bình hành. Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β) đi qua trung điểm M của cạnh AB và song song BD , SA .

Giải.

Gọi mặt phẳng (β) cần dựng.

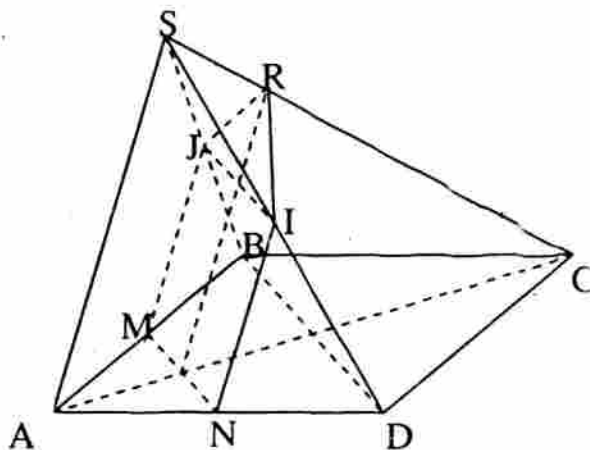
$$(\beta) \parallel BD \Leftrightarrow (\beta) \times (ABCD) = MN \parallel BD; \quad N \in AD.$$

$$(\beta) \parallel SA \Rightarrow (\beta) \times (SAD) = NP; \quad NP \parallel SA \text{ với } P \in SD$$

$$(\beta) \parallel BD \Leftrightarrow (\beta) \times (SBD) = IJ \parallel BD$$

$$(\beta) \parallel SC \Leftrightarrow (\beta) \times (SAC) = LR \parallel SA \text{ với } R \in SC.$$

Vậy thiết diện đó $MNIRJ$
($MNIJ$ là hình bình hành).



II. Bài tập tư luyện.

Dạng 1:

Bài 187. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB; I là trung điểm của AB. Lấy M thuộc AD sao cho $AD = 3AM$.

- Tìm giao tuyến (SAD) và (SBC).
- Đường thẳng đi qua M song song AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG \parallel (SCD)$.
- Chứng minh rằng $MG \parallel (SCD)$.

Bài 188. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' điểm E chia DB theo tỉ số $1/3$, điểm F chia B'A theo tỉ số $1/3$. Chứng minh $EF \parallel (A'B'CD)$.

Bài 189. (Bài tập 4 SGK trang 79) Cho tứ diện ABCD xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng α đi qua trọng tâm G của tam giác ABC đồng thời song song với AD và BC.

Bài 190*. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Một điểm M không nằm trên a và b. Chứng minh rằng chỉ có một mặt phẳng P chứa M song song với a và b.

Bài 191. Cho hai đường thẳng a, b và một điểm M không thuộc a, b. Dựng đường thẳng c đi qua M cắt a và b.

Bài 192. Cho tứ diện ABCD, một điểm M thuộc cạnh BC dựng thiết diện chứa điểm M song song AB và CD. Thiết diện là hình gì?

Bài 193. Cho tứ diện SABC. M là điểm tùy ý trên cạnh SB.

- Dựng thiết diện đi qua M và song song SA, SC. Thiết diện là hình gì?
- Xác định vị trí của M để thiết diện là hình thoi.
- Xác định M để diện tích thiết diện lớn nhất.

III. Hướng dẫn giải.

Bài 187.

a) (SAD) và (SBC) có $AD \parallel BC$ và có $S \in (SAD)$ và $S \in (SBC)$.

Nên giao tuyến:

$$(SAD) \cap (SBC) = Sx.$$

$$Sx \parallel AB \parallel BC$$

b) Chứng minh $GN \parallel (SCD)$.

$$MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vì G là trọng tâm nên: } \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle SIC : \Leftrightarrow \frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow GN \parallel SC$$

c) Cách 1:

